Correction Devoir maison n°8

Exercice 1

On désigne par n un entier naturel non nul et l'on se propose d'étudier les racines positives de l'équation $e^x = x^n$que l'on note (E_n). A cet effet on introduit la fonction $f_n$définie par

$$f_n(x) = 1 - x^n e^{-x}.$$

On a donc pour tout entier n, $(E_n) \Leftrightarrow f_n(x) = 0$

1. Etude des racines positives des équations (E_1) et (E_2)

   (a) On étudie les variations de f_1. On a

   $$f_1(x) = 1 - xe^{-x}.$$

   La fonction f_1 est de classe C^1 sur $[0; +\infty[$. On calcule alors

   $$\forall x \in [0; +\infty[, f_1'(x) = -e^{-x} + xe^{-x} = (x-1)e^{-x}$$

   On calcule la limite de la fonction f_1 en $+\infty$.

   $$\lim_{x \to +\infty} 1 - xe^{-x} = 1$$

   par croissance comparée.
   La courbe représentative de f a donc une asymptote horizontale en $+\infty$
   On a donc le tableau de variation

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f_1'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f_1	1	$\searrow$	$\frac{e-1}{e}$	$\nearrow$	1

   On a

   $$f_2(x) = 1 - x^2 e^{-x}.$$

   La fonction f_2 est de classe C^1 sur $[0; +\infty[$. On calcule alors

   $$\forall x \in [0; +\infty[, f_2'(x) == -2xe^{-x} + x^2 e^{-x} = x(x-2)e^{-x}$$

   On calcule la limite de la fonction f_1 en $+\infty$.

   $$\lim_{x \to +\infty} 1 - x^2 e^{-x} = 1$$

   par croissance comparée.
   La courbe représentative de f_2 a donc une asymptote horizontale en $+\infty$

x	0		2		$+\infty$
Signe de $f_2'(x)$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f_2	1	$\searrow$	$1-\frac{4}{e^2}$	$\nearrow$	1

Sur la courbe représentative de f_1, on place l'asymptote d'équation $y = 1$ en $+\infty$, la tangente horizontale en 1 et la tangente de pente -1 en 0.
Sur la courbe représentative de f_2, on place l'asymptote d'équation $y = 1$ en $+\infty$, la tangente horizontale en 1 et en 0

(b) $(E_1) \Leftrightarrow f_1(x) = 0$. Or le minimum de f_1 est $\dfrac{e-1}{e} > 0$ et l'équation n'a pas de solution positive
De même $(E_2) \Leftrightarrow f_2(x) = 0$. Or le minimum de f_2 est $\dfrac{e^2-4}{e^2} > 0$ car $e > 2$ donc $e^2 > 4$ (car la fonction carré est strictement croisante sur $\mathbb{R}^+$ et que me et 4 en sont éléments).et l'équation (E_2) n'a pas de solution positive.

(c) Le programme scilab s'écrit

```
function y = f(x,n)
    y = 1 - x.^n .* exp(-x)
endfunction

X = 0:0.01:5
plot2d(X,f(X,1))
plot2d(X,f(X,2))
```

2. Etude des racines positives de l'équations (E_3)

(a) On a
$$f_3(x) = 1 - x^3 e^{-x}.$$
La fonction f_3 est de classe C^1 sur $[0; +\infty[$. On calcule alors
$$\forall x \in [0; +\infty[, f_3'(x) = -3x^2e^{-x} + x^3e^{-x} = x^2(x-3)e^{-x}$$
On calcule la limite de la fonction f_1 en $+\infty$.
$$\lim_{x\to+\infty} 1 - x^3e^{-x} = 1$$
par croissance comparée.
La courbe représentative de f_3 a donc une asymptote horizontale en $+\infty$

x	0		3		$+\infty$
Signe de $f_3'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f_3	1	$\searrow$	$1-\frac{27}{e^3}$	$\nearrow$	1

Cette fois, comme $e^3 < 27$ alors $27/e^3 > 1$ et $1 - \dfrac{27}{e^3} < 0$.

On a $f_3(2) = 1 - 8/e^2 > 0$ donc f_3 est strictement positive sur $[0, 2]$

Comme f_3 est continue et strictement décroissante, elle est bijective de $]2, 3[$ dans $\left]1 - \frac{27}{e^3}, 1 - \frac{8}{e^2}\right[$.

Or 0 appartient à cet intervalle donc l'équation $(E_3) \Leftrightarrow f_3(x) = 0$ a une unique solution u sur cet intervalle. $(2 < u < 3)$

De même comme $f_3(4) = 1 - 4^3/e^4 < 0$ et $f_3(5) = 1 - 5^3/e^5 > 0$, (E_3) a une unique solution v sur l'intervalle $]4, 5[$ et n'en a aucune sur $[3, 4]$ ni sur $[5, +\infty[$

Donc l'équation (E_3) admet deux racines positives u et v telles que$1 < 2 < u < 3 < 4 < v < 5$

(b) Soit la suite définie par la relation $y_{n+1} = 3\ln(y_n)$ et la condition initiale y_0,où y_0 est un nombre réel strictement supérieur à u.

— $u < y_0 \leq v$, alors par récurernce :
soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u < y_n \leq v$ comme ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ alors $3\ln(u) < 3\ln(y_n) \leq 3\ln(v)$
Et comme u et v *sont* soutions de $x^3 = e^x \Leftrightarrow 3\ln(x) = x$ alors on a $3\ln(u) = u$ et $3\ln(v) = v$
Donc $u < y_{n+1} \leq v$
Et la propriété estvraie pour tout entier n.

— De même par récurrence si $v \leq y_0$, alors pour tout entier naturel n, $v \leq y_n$.

— Signe ?
$y_n - y_{n-1} > 0 \Leftrightarrow y_n > y_{n-1} \Leftrightarrow 3\ln(y_n) > 3\ln(y_{n-1})$ car la fonction ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et que y_{n-1} et y_n en sont éléments ; et finalement $y_n - y_{n-1} > 0 \Leftrightarrow y_{+1} - y_n > 0$.
De même pour =0 et pour < 0; Donc $y_{n+1} - y_n$ est du même signe que $y_n - y_{n-1}$ et par récurrence du même signe que $y_1 - y_0$

Donc si $y_0 < y_1$ alors pour tout entier n, $y_n < y_{n+1}$ et si $y_0 > y_1$ alors pour tout entier n, $y_n > y_{n+1}$

— Or pour $u < y_0 \leq v$ on a, d'après les variations def_0 : $f_3(y_0) \leq 0$ donc $1 - y_0^3 e^{-y_0} \leq 0$ donc $e^{y_0} < y_0^3$ et comme ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ alors $y_0 \leq 3\ln(y_0)$ et $y_0 \leq y_1$.
Donc si $u < y_0 \leq v$ alors pour tout entier n : $y_n \leq y_{n+1}$ et la suite sera donc croissante.

— De même si $y_0 \geq v$ alors $f_3(y_0) \geq 0$ et la suite sera décroissante

3. Étude des racines positives de l'équation (E_n) pour $n \geq 3$.

(a) On a
$$f_n(x) = 1 - x^n e^{-x}.$$
La fonction f_n est de classe C^1 sur $[0; +\infty[$. On calcule alors
$$\forall x \in [0; +\infty[, \quad f_n'(x) = -nx^{n-1}e^{-x} + x^n e^{-x} = x^n (x - n) e^{-x}$$
On calcule la limite de la fonction f_n en $+\infty$.
$$\lim_{x \to +\infty} 1 - x^n e^{-x} = 1$$
par croissance comparée.

La courbe représentative de f_n a donc une asymptote horizontale en $+\infty$

x	0		3		$+\infty$
Signe de $f_3'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f_3	1	$\searrow$	$1-\frac{n^n}{e^n}$	$\nearrow$	1

Cette fois, comme $n \geq 3 > e$ alors $(n/e) > 1$ et $(n/e)^n > 1^n$ car $n > 0$ et la fonction puissance n est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

Donc $f_n(n) < 0$.

Comme $f_n(1) = 1 - \dfrac{1}{e} > 0,\ f_n > 0$ sur $[0,1]$ et (E_n) n'a pas de solution.

Sur $]1,n[$, la fonction f_n est continue et strictement décroissante. Elle est donc bijective de $]1,n[$ dans $]\lim_n f_n ; \lim_1 f_n[$.

et comme $0 \in \left] f_n(n) ; 1 - \frac{1}{e} \right[$ l'équation $f_n(x) = 0 \Leftrightarrow (E_n)$ a une unique solution u_n sur $]1,n[$.

De même sur l'équation $f_n(x) = 0 \Leftrightarrow (E_n)$ a une unique solution v_n.

Donc l'équation (E_n) admet deux racines positives u_n et v_n telles que $1 < u_n < n < v_n$.

(b) Pour déterminer le signe de $f_n(u_{n-1})$, on fait intervenir $f_{n-1}(u_{n-1}) = 0$ pour $n-1 \geq 3$ donc $n \geq 4$:

$$\begin{aligned}
f_{n-1}(u_{n-1}) &= 1 - (u_{n-1})^{n-1} e^{-u_{n-1}} = 0 \\
f_n(u_{n-1}) &= 1 - (u_{n-1})^{n} e^{-u_{n-1}} \\
f_n(u_{n-1}) &= f_n(u_{n-1}) - f_{n-1}(u_{n-1}) \\
&= (u_{n-1})^{n-1} e^{-u_{n-1}} - (u_{n-1})^{n} e^{-u_{n-1}} \\
&= (u_{n-1})^{n-1} e^{-u_{n-1}} (1 - u_{n-1}) < 0
\end{aligned}$$

car $1 < u_{n-1}$. Donc pour tout entier $n \geq 4$ on a : $f_n(u_{n-1}) < 0$

On a donc $f_n(u_{n-1}) < 0 = f_n(u_n)$

Et comme f_n est strictement décroissante sur $[0,n]$ et que u_n et u_{n-1} ($\leq n-1$) en sont éléments alors $u_{n-1} > u_n$

La suite u est donc décroissante et minorée par 1. Elle est donc convergente. Soit L sa limite.

(c) On a $n \ln(u_n) = u_n$ donc $\ln(u_n) = u_n/n$ et $u_n = \exp(u_n/n)$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} exp(u_n/n) = 1$.

$$\boxed{\text{Finalement } \lim_{n\to+\infty} u_n = 1.}$$

(d) On a comme pour u_n

$$\begin{aligned}
f_{n-1}(v_n) &= f_{n-1}(v_n) - f_n(v_n) \\
&= (v_n)^n e^{-v_n} - (v_n)^{n-1} e^{-v_n} \\
&= (v_n)^{n-1} e^{-v_n} (v_n - 1) > 0
\end{aligned}$$

Donc $f_{n-1}(v_{n-1}) = 0 < f_{n-1}(v_n)$. Et comme f_{n-1} est strictement croissante sur $[n-1,+\infty[$ et que v_n ($\geq n \geq n-1$) et v_{n-1}en sont éléments alors $v_{n-1} < v_n$.

La suite v est donc croissante

(e) On pose pour tout réel $x > 1$: $g(x) = x - \ln(x)$. g est dérivable sur $]0, +\infty[$

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$
$$g(1) = 0$$

Comme g est strictement croissante et continue sur $]1, +\infty[$ alors g réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur $g(]1; +\infty[) =]1, +\infty[$
Elle a donc une réciproque.
On a $(v_n)^n = e^{v_n}$ donc en élevant à la puissance $1/n$: $v_n = e^{v_n/n}$

$$g(v_n/n) = \frac{v_n}{n} - \ln\left(\frac{v_n}{n}\right) = \frac{v_n}{n} - \ln\left(\frac{e^{v_n/n}}{n}\right) = \frac{v_n}{n} - \ln\left(e^{v_n/n}\right) + \ln(n)$$
$$= \frac{v_n}{n} - v + \ln(n) = \ln(n)$$

Comme $v_n/n \in]1, +\infty[$ (car $v_n > n$) et que $\ln(n) \in]1, +\infty[$ (car $n > e$) alors

$$g(v_n/n) = \ln(n) \Leftrightarrow \frac{v_n}{n} = g^{-1}(\ln(n))$$

Or, comme $y = g(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$ alors, par symétrie, $x = g^{-1}(y) \to +\infty$ quand $y \to +\infty$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} g^{-1}(\ln(n)) = +\infty$ et donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} ng^{-1}(\ln(n)) = +\infty.}$$

Exercice 2

Soit a et b des réels avec $0 < a < b$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n + v_n}.$$

1. Montrons par récurrence sur n que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ et } v_n \text{ existent bien et } u_n > 0,\ v_n > 0.$$

Tout d'abord, on a bien $u_0 = a > 0$ et $v_0 = b > 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que u_n et v_n existent bien et que $u_n > 0$ et $v_n > 0$.
On a alors $u_n + v_n > 0$ donc, en particulier, $u_n + v_n \neq 0$ et ainsi u_{n+1} et v_{n+1} existent bien.
De plus, $u_n^2 > 0$, $v_n^2 > 0$ et $u_n + v_n > 0$ donc $u_{n+1} > 0$ et $v_{n+1} > 0$. La propriété reste vraie au rang $n + 1$.
On peut donc affirmer, d'après le principe de récurrence, que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ et } v_n \text{ existent bien et } u_n > 0,\ v_n > 0.}$$

2.
```
n = input("Entrez n:")
a = input("Entrez a:")
b = input("Entrez b:")
u = a
v = b
for i=1:n
```

```
        x=u^2/(u+v)
        v=v^2/(u+v)
        u=x
    end
    disp(u,"un=")
    disp(v,"vn=")
```

3. (a) Montrons par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \left(\frac{a}{b}\right)^{2^n}$.

Tout d'abord, $x_0 = \frac{u_0}{v_0} = \frac{a}{b}$ et $\left(\frac{a}{b}\right)^{2^0} = \left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a}{b}$ donc l'égalité est vérifiée pour $n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $x_n = \left(\frac{a}{b}\right)^{2^n}$, alors

$$x_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{\frac{u_n^2}{u_n+v_n}}{\frac{v_n^2}{u_n+v_n}} = \frac{u_n^2}{v_n^2} = \left(\frac{u_n}{v_n}\right)^2 = x_n^2 = \left(\left(\frac{a}{b}\right)^{2^n}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^{2^n \times 2} = \left(\frac{a}{b}\right)^{2^{n+1}}$$

donc l'égalité reste vraie au rang $n + 1$.
On peut donc affirmer, d'après le principe de récurrence, que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = \left(\tfrac{a}{b}\right)^{2^n}.}$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$y_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n} - \frac{v_n^2}{u_n + v_n} = \frac{u_n^2 - v_n^2}{u_n + v_n} = \frac{(u_n + v_n)(u_n - v_n)}{u_n + v_n} = u_n - v_n = y_n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_{n+1} = y_n$ donc

$$\boxed{(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est constante.}}$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$ donc $u_n + v_n > u_n > 0$ et

$$\frac{u_n^2}{u_n + v_n} < \frac{u_n^2}{u_n} = u_n$$

autrement dit $u_{n+1} < u_n$.

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement décroissante.}}$$

5. (a)

$$\frac{v_k}{v_{k+1}} = \frac{v_k}{\frac{v_k^2}{u_k+v_k}} = \frac{u_k + v_k}{v_k} = \frac{u_k}{v_k} + 1 = x_k + 1 = \left(\frac{a}{b}\right)^{2^k} + 1 = 1 + x^{2^k}.$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \tfrac{v_k}{v_{k+1}} = 1 + x^{2^k}.}$$

(b) On a, d'après (4)(a)(i), pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P_n = \prod_{k=0}^{n} \frac{v_k}{v_{k+1}} = \frac{v_0}{v_{n+1}} = \frac{1}{v_{n+1}}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ P_n = \tfrac{1}{v_{n+1}}.}$$

Problème - EDHEC 2005

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O. Au départ, le mobile est à l'origine. Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n, alors, à l'instant $(n+1)$ il sera sur le point d'abscisse $(k+1)$ avec la probabilité p $(0<p<1)$ ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $1-p$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n et l'on a donc $X_0=0$. On admet que, pour tout n de $\mathbb{N}$ X_n est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$. Par ailleurs, on note T l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ).

Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont 0, 0, 1, 2, 0, 0, 1, alors on a $T=1$. Si les abscisses successives sont : 1, 2, 3, 0, 0, 1, alors on a $T=4$.

1. (a) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $(T=k)$ signifie que le mobile revient en O pour la première fois à k. Donc qu'il y est à k et qu'il n'y était pas avant :

$$\boxed{(T=k)=\bigcap_{i=1}^{k-1}(X_i\neq 0)\cap(X_k=0)}$$

(b) Comme il est au point d'abscisse 0 à l'instant 0, il passera en 1 avec une probabilité p et reviendra (restera) en 0 avec une probabilité $1-p$. Donc $X_1(\Omega)=\{0,1\}$.

$$\mathrm{P}(X_1=0)=1-p \quad \text{et} \quad \mathrm{P}(X_1=1)=p$$

$$\boxed{X_1 \text{ suit une loi de Bernouilli de paramètre } p\text{, c'est à dire } X_1 \hookrightarrow \mathscr{B}(p).}$$

(c) Les X_i ne sont pas indépendants, mais on a d'après la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(T=k) &= \mathrm{P}(X_1\neq 0)\,\mathrm{P}_{X_1\neq 0}(X_2\neq 0)\ldots\mathrm{P}_{X_{k-1}\neq 0}(X_k=0)\\
&= p\cdot p\ldots(1-p)\\
&= p^{k-1}(1-p)
\end{aligned}$$

car lorsqu'il n'est pas en O, il y revient avec la probabilité $(1-p)$ et il n'y revient pas (avance d'une case) avec la probabilité p.

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N}^*, P(T=k)=p^{k-1}(1-p)}$$

2. (a) On montre par récurrence que $\mathscr{P}_n$: $\{X_n(\Omega)=[\![0,n]\!]\}$.
   - **Initialisation :** On a vu que $X_0(\Omega)=\{0\}$ et $X_1(\Omega)=\{0,1\}$ Donc $\mathscr{P}_0$ et $\mathscr{P}_1$ sont vraies.
   - **Hérédité :** On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vrai pour un certain rang n. On a donc $X_n(\Omega)=[\![0,n]\!]$. Les valeurs possibles de X_n vont de 0 à n. Comme l'abscisse du point peut augmenter de 1, X_{n+1} peut prendre toutes les valeurs de $[\![1,n+1]\!]$. Et comme il peut également revenir à l'origine, $X_{n+1}(\Omega)=[\![0,n+1]\!]$.

     La proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition $(\mathscr{P}_n)$ est héréditaire.
   - **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N},\ X_n(\Omega)=[\![0,n]\!].}$

   (b) On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(X_{n-1}=k)_{0\leq k\leq n}$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X_n=0) &= \sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{P}(X_{n-1}=k)\,\mathrm{P}_{X_{n-1}=k}(X_n=0)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(1-p)\,\mathrm{P}(X_{n-1}=k)\\
&= (1-p)\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{P}(X_{n-1}=k)\\
&= 1-p
\end{aligned}$$

car la probabilité de revenir en O est $(1-p)$ et que $(X_{n-1}=k)_{0\le k\le n-1}$ est un système complet d'événements.

$$\boxed{\mathrm{P}(X_n=0)=1-p}$$

3. (a) Comme il ne peut avancer que d'un à chaque étape, pour être en k à l'instant $n+1$, le point devait être en $k-1$ à l'instant précédent.
Donc $(X_{n+1}=k)=(X_n=k-1)\cap(X_{n+1}=k)$
Et

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X_{n+1}=k) &= \mathrm{P}(X_n=k-1)\,\mathrm{P}_{X_n=k-1}(X_{n+1}=k)\\
&= p\,\mathrm{P}(X_n=k-1)
\end{aligned}$$

car la probabilité d'avancer d'un est p

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \forall k\in\{1,2,\dots n+1\}\,,\ \mathrm{P}(X_{n+1}=k)=p\,\mathrm{P}(X_n=k-1)}$$

(b) On montre par récurrence que $\mathscr{P}_n$: $\{\forall k\in[\![0,n-1]\!],\ P(X_n=k)=p^k(1-p)\}$.

— **Initialisation :** Pour $n=1$ et $k=0$, on a $P(X_1=0)=1-p=p^0(1-p)$. La proposition $\mathscr{P}_1$ est vraie.

— **Hérédité :** On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vrai pour un certain rang $n\ge 1$. Soit $k\in[\![1,n]\!]$ ainsi $k-1\in[\![0,n-1]\!]$. On a d'après la question précédente

$$\begin{aligned}
P(X_{n+1}=k) &= pP(X_n=k-1)\\
&= p\times p^{k-1}(1-p)\\
&= p^k(1-p)
\end{aligned}$$

De plus $P(X_{n+1}=0)=(1-p)p^0$.
La proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition $(\mathscr{P}_n)$ est héréditaire.

— **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N}^*,\ \forall k\in[\![0,n-1]\!],\ P(X_n=k)=p^k(1-p).}$

et on a $\mathrm{P}(X_{n+1}=n+1)=p.\mathrm{P}(X_n=n)$
En effet, pour être en n à l'instant n, il doit avoir avancé d'un à chaque étape, ceci avec une probabilité de p.
Donc la suite $(\mathrm{P}(X_n=n))_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison p et de premier terme $\mathrm{P}(X_0=0)=1$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}:\mathrm{P}(X_n=n)=p^n\cdot 1}$$

(c) Pour calculer la somme, on doit distinguer la valeur $k = n$ et les autres :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(X_n = k) &= \mathrm{P}(X_n = n) + \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{P}(X_n = k) \\ &= p^n + \sum_{k=0}^{n-1} p^k (1-p) \\ &= p^n + (1-p)\frac{1-p^n}{1-p} \\ &= 1\end{aligned}$$

Ce calcul (découpage de $\sum$) n'étant valable que pour $n - 1 \geq 0$ donc pour $n \geq 1$
pour $n = 0$: $\sum_{k=0}^{0} \mathrm{P}(X_0 = k) = 1$

4. Dans cette question et dans cette question seulement, on prend $p = \dfrac{1}{3}$.
Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire étudiée et affiche la valeur prise par X_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n = input("Entrez un entier n")
X = 0
p = 1/3
for k = ..1:n..
    u = rand()
    if ..u < p.. then
        X = X+1
    else
        X = ..0..
    end
end
disp(X)
```

5. (a) Les trois méthodes classiques pour obtenir ce résultat sont :

— par récurrence sur n (le plus naturel puisque le résultat est donné)

— en dérivant la fonction $x \to \sum_{k=1}^{n-1} x$
$f(x) = \sum_{k=1}^{n-1} x^k$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \sum_{k=1}^{n-1} k\, x^{k-1}$
Et comme, pour $x \neq 1$, $f(x) = \frac{1-x^n}{1-x}$ alors

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{-nx^{n-1}(1-x) + (1-x^n)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1 - nx^{n-1} + (n-1)x^n}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

et donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k\, x^{k-1} = \frac{1 - nx^{n-1} + (n-1)x^n}{(1-x)^2}$ pour tout $x \neq 1$.

— en développant $(1-p)\sum_{k=1}^{n-1} k\,p^{k-1}$:

$$\begin{aligned}
(1-p)\sum_{k=1}^{n-1} k\,p^{k-1} &= \sum_{k=1}^{n-1} k\,p^{k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} k\,p^{k} \\
&= \sum_{h=0}^{n-2} (h+1)\ p^{h} - \sum_{k=1}^{n-1} k\,p^{k} \\
&= \sum_{h=0}^{n-2} p^{h} + \sum_{h=0}^{n-2} h\,p^{h} - \sum_{k=1}^{n-1} k\,p^{k} \\
&= \frac{1-p^{n-1}}{1-p} + 0 - (n-1)\,p^{n-1} \text{ car } p \neq 1 \\
&= \frac{1-p^{n-1}-(1-p)\,(n-1)\,p^{n-1}}{1-p} \\
&= \frac{1-n\,p^{n-1}+(n-1)\,p^{n}}{1-p}
\end{aligned}$$

et donc $(1-p\neq 0)$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k\,p^{k-1} = \frac{1-n\,p^{n-1}+(n-1)\,p^{n}}{(1-p)^2}$$

(b) On calcule l'espérance en traitant à part les valeurs $k=0$ et : n : (pour $n\geq 2$)

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{n} k\,\mathrm{P}(X=k) = 0\,\mathrm{P}(X=0) + n\,\mathrm{P}(X=n) + \sum_{k=1}^{n-1} k\,\mathrm{P}(X=k) \\
&= n\,p^{n} + \sum_{k=0}^{n-1} k\,(1-p)\,p^{k} \text{ on fait réapparaître l'expression précédente} \\
&= n\,p^{n} + (1-p)\,p\sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} \\
&= n\,p^{n} + (1-p)\,p\frac{1-n\,p^{n-1}+(n-1)\,p^{n}}{(1-p)^2} \\
&= p\frac{n\ p^{n-1}\,(1-p)+1-n\ p^{n-1}+(n-1)\,p^{n}}{1-p}
\end{aligned}$$

formule qui est également valable pour $n=0$ et $n=1$.

$$\boxed{\text{Ainsi } E(X) = p\tfrac{1-p^n}{1-p}.}$$

6. (a) On a $\mathrm{P}(X_{n+1}=k) = p\mathrm{P}(X_n=k-1)$ pour $k\in[[1,n+1]]$
D'après le théorème de transfert,

$$\begin{aligned}
E\left(X_{n+1}^2\right) &= \sum_{k=0}^{n+1} k^2 \mathrm{P}\left(X_{n+1}=k\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n+1} k^2 p\mathrm{P}\left(X_n=k-1\right)+0\\
&= p\sum_{h=0}^{n} (h+1)^2\, p\mathrm{P}\left(X_n\right)\\
&= p\sum_{h=0}^{n} \left(h^2+2h+1\right) p\mathrm{P}\left(X_n\right)\\
&= p\left(\sum_{h=0}^{n} h^2 p\mathrm{P}\left(X_n\right)+2\sum_{h=0}^{n} hp\mathrm{P}\left(X_n\right)+\sum_{h=0}^{n} p\mathrm{P}\left(X_n\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } E\left(X_{n+1}^2\right)=p\left(E\left(X_n^2\right)+2E\left(X_n\right)+1\right)}$$

(b) Avec $u_n=E\left(X_n^2\right)+(2n-1)\dfrac{p^{n+1}}{1-p}$, on a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= E\left(X_{n+1}^2\right)+(2(n+1)-1)\frac{p^{n+2}}{1-p}\\
&= p\left(E\left(X_n^2\right)+2E\left(X_n\right)+1\right)+(2n+1)\frac{p^{n+2}}{1-p}\\
&= pE\left(X_n^2\right)+2p^2\frac{1-p^n}{1-p}+p+(2n+1)\frac{p^{n+2}}{1-p}\\
&= pE\left(X_n^2\right)+p^2\frac{2\left(1-p^n\right)+(2n+1)p^n}{1-p}+p\\
&= pE\left(X_n^2\right)+p^2\frac{2+(2n-1)p^n}{1-p}+p\\
&= pE\left(X_n^2\right)+\frac{p^2+p+(2n-1)p^{n+2}}{1-p}
\end{aligned}$$

en remplaçant $E\left(X_n\right)$ par sa valeur.
Et en partant du second membre :

$$\begin{aligned}
p\,u_n+\frac{p(1+p)}{1-p} &= p\left(E\left(X_n^2\right)+(2n-1)\frac{p^{n+1}}{1-p}\right)+\frac{p(1+p)}{1-p}\\
&= p\,E\left(X_n^2\right)+\frac{p^2+p+(2n-1)p^{n+2}}{1-p}\\
&= u_{n+1}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{u_{n+1}=p\,u_n+\dfrac{p(1+p)}{1-p}}$

(c) La suite u est donc arithmético-géométrique.
On détermine c tel que $c=p\,c+\frac{p(1+p)}{1-p}\iff c(1-p)=\frac{p(1+p)}{1-p}\iff c=\frac{p(1+p)}{(1-p)^2}$
Et soit $v_n=u_n-c$ pour tout n entier.
On a alors $v_{n+1}=u_{n+1}-c=p\,u_n+\frac{p(1+p)}{1-p}-\left(p\,c+\frac{p(1+p)}{1-p}\right)=p\,v_n$
Et la suite v est géométrique de raison p et de premier terme $v_0=u_0-\frac{p(1+p)}{(1-p)^2}$

avec $u_0 = E\left(X_0^2\right) + -\frac{p}{1-p} = -\frac{p}{1-p}$ donc $v_0 = -\frac{p}{1-p} - \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} = \frac{-2p}{(1-p)^2}$
$v_n = \dfrac{-2p^{n+1}}{(1-p)^2}$ et $u_n = v_n + c = \frac{-2p^{n+1}}{(1-p)^2} + \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} = \frac{-2p^{n+1}+p(1+p)}{(1-p)^2}$
Et comme

$$\begin{aligned}
E\left(X_n^2\right) &= u_n - (2n-1)\frac{p^{n+1}}{1-p} \\
&= \frac{-2p^{n+1} + p(1+p)}{(1-p)^2} - (2n-1)\frac{p^{n+1}}{1-p} \\
&= \frac{-2p^{n+1} + p(1+p) - (1-p)(2n-1)p^{n+1}}{(1-p)^2} \\
&= \frac{(-2n-1+p(2n-1))p^{n+1} + p(1+p)}{(1-p)^2}
\end{aligned}$$

(d) On développe le calcul de la variance :

$$\begin{aligned}
V(X_n) &= E\left(X_n^2\right) - E(X_n)^2 \\
&= \frac{(-2n-1+p(2n-1))p^{n+1} + p(1+p)}{(1-p)^2} - p^2\frac{(1-p^n)^2}{(1-p)^2} \\
&= \frac{(-2n-1+p(2n-1))p^{n+1} + p(1+p) - p^2(1-2p^n+p^{2n})}{(1-p)^2} \\
&= \frac{p}{(1-p^2)}\left[(-2n-1+p(2n-1))p^n + 1 + p - p\left(1-2p^n+p^{2n}\right)\right] \\
&= \frac{p}{(1-p^2)}\left[(-2n-1+p(2n+1))p^n + 1 - p^{2n+1}\right]
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement } V(X_n) = \frac{p}{(1-p^2)}\left[1 + (2n+1)(-1+p)p^n - p^{2n+1}\right].}$$